دالة لوغاريتمية مع الحل

°1\ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$

بـ : $$f_n(x)=\ln x+\frac{x}{n}-1$$

a. عين نهايات f_n عند 0 و عند $+\infty$ ثم ادرس تغيرات f_n .

b. بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$. نسمي α_n هذا الحل . بين أنه ينتمي إلى المجال $[1;e[$.

°2\ المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نسمي (Γ) المنحني البياني للدالة لوغاريتم النبيري .

a. ليكن n عددا حقيقيا غير معدوما . عين معادلة للمستقيم Δ_n الذي يشمل النقطة A إحداثيتيها $(0;1)$ و النقطة B_n إحداثيتيها $(n;0)$.

b. أرسم المنحني (Γ) و المستقيمات Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 .

c. بين أن α_n هي فاصلة نقطة تقاطع (Γ) مع Δ_n .

d. عين قيمة α_1 ثم جد تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (α_n) .

°3\ **a.** أحسب $\ln(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n .

b. أحسب $f_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n ثم تحقق أن $f_{n+1}(\alpha_n)<0$.

c. استنتج من السؤال السابق اتجاه تغيرات المتتالية (α_n) .

d. بين أن المتتالية (α_n) متقاربة . نسمي l نهايتها . بين أن $\ln(l)=1$ و استنتج قيمة l .

°4\ نسمي D_n الحيز للمستوي المحدد بـ (Γ) والمستقيمات التي معادلتها $y=0$ ، $x=\alpha_n$ و $x=e$.

a. احسب مساحة الحيز D_n ثم تحقق أن هذه المساحة تساوي $\frac{\alpha_n^{\ 2}}{n}$.

b. بين أن $(e-\alpha_n)\ln(\alpha_n) \le \frac{\alpha_n^{\ 2}}{n} \le (e-\alpha_n)$.

c. استنتج حصرا لـ $n(e-\alpha_n)$.

d. هل المتتالية التي حدها العام $n(e-\alpha_n)$ متقاربة ؟

www.youcefmaths.com

الحل:

1° \ $f_n(x)=\ln x+\frac{x}{n}-1$

a. $\lim_{x\to 0} f_n(x)=-\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{n}-1\right)=-1\end{array}\right\}$

$\lim_{x\to +\infty} f_n(x)=+\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{n}-1\right)=+\infty\end{array}\right\}$

الدالة f_n قابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ (مجموع دالتين قابلتين الاشتقاق على $]0;+\infty[$)

و $f_n'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{n}$. مهما كان x من $]0;+\infty[$ ، $f_n'(x)>0$.

الدالة f_n متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

b. الدالة f_n – قابلة الاشتقاق ، إذن مستمرة على $]0;+\infty[$.

– متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

– $\lim_{x\to 0} f_n(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f_n(x)=+\infty$.

– 0 ينتمي للمجال $]-\infty;+\infty[$

حسب نظرية القيم المتوسطة ، المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$.

$f_n(1)=\ln 1+\frac{1}{n}-1=\frac{1}{n}-1$. بما أن n عدد طبيعي غير معدوم فإن $n\geq 1$ أي

$\frac{1}{n}\leq 1$ و منه $f_n(1)\leq 0$.

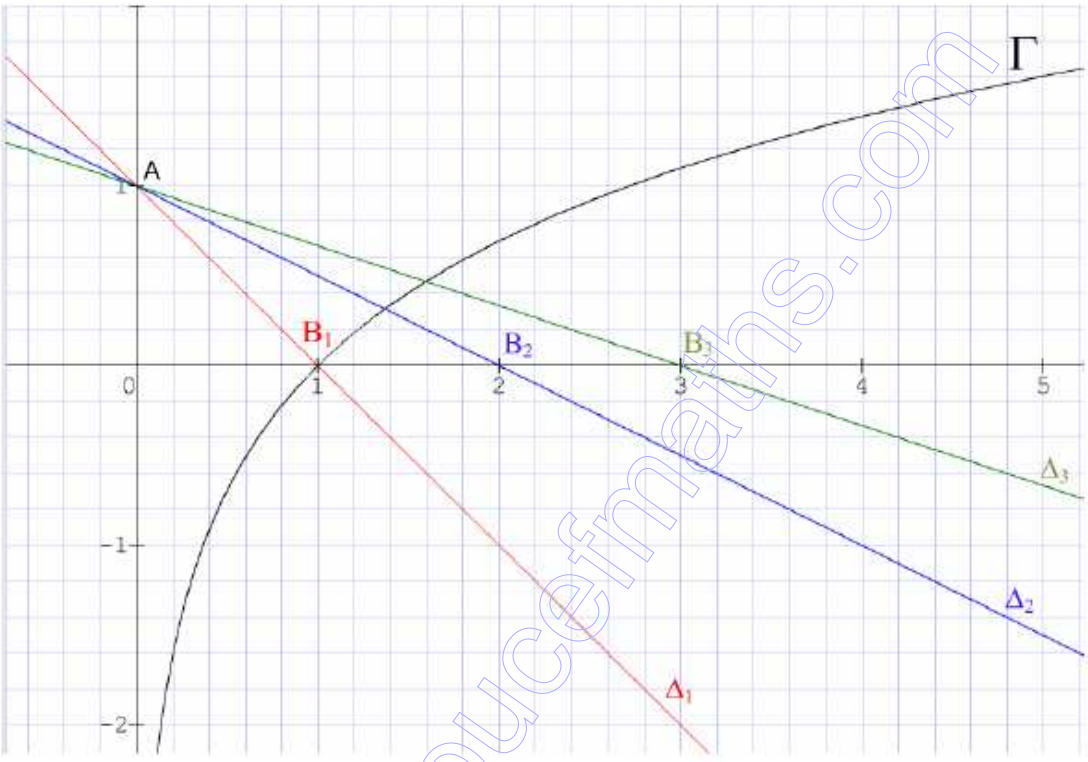
$f_n(e)=\ln e+\frac{e}{n}-1=1+\frac{e}{n}-1=\frac{e}{n}$ و منه $f_n(e)>0$.

نستنتج إذن أن $1\leq \alpha_n<e$.

°2\ **a.** معامل توجيه المستقيم Δ_n هو : $\frac{y_{B_n}-y_A}{x_{B_n}-x_A}=\frac{0-1}{n-0}=-\frac{1}{n}$.

النقطة $A(0;1)$ تنتمي لـــ Δ_n . معادلة للمستقيم Δ_n هي إذن : $y=-\frac{x}{n}+1$.

b.



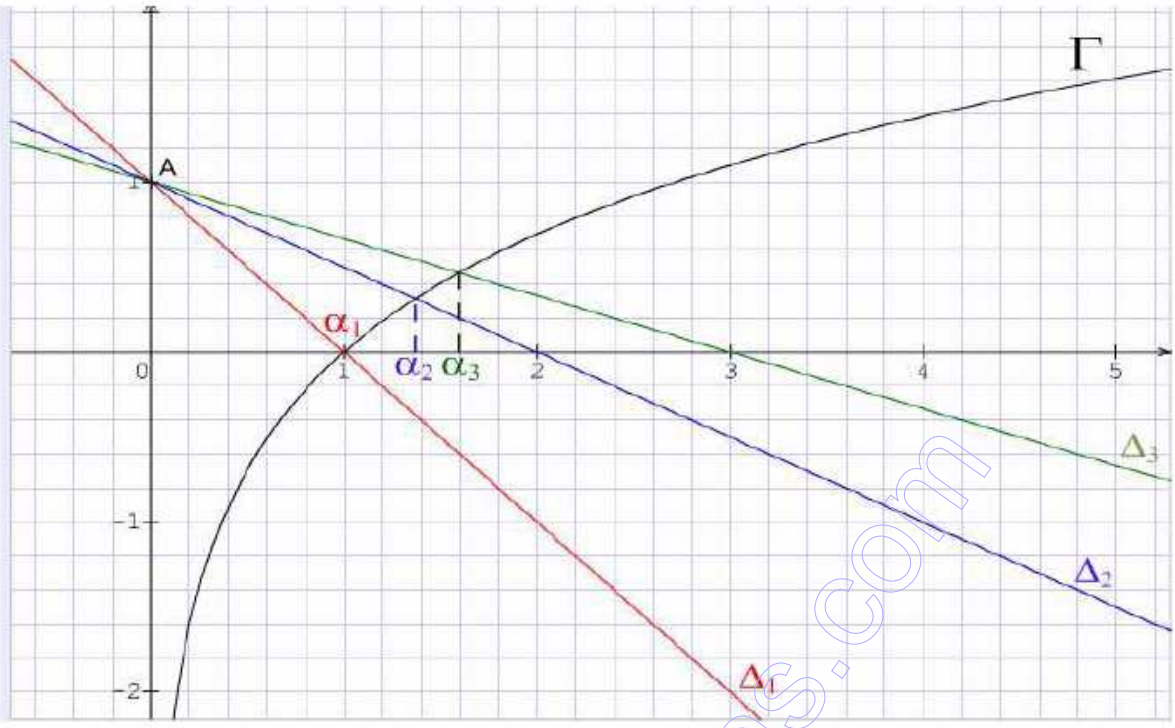
c. نضع $\{M_n(x;y)\}=(\Gamma)\cap\Delta_n$. لدينا : $\begin{cases} y=\ln x \\ y=-\frac{x}{n}+1 \end{cases}$

و منه $\ln x=-\frac{x}{n}+1$ أي $\ln x+\frac{x}{n}-1=0$

أي $f_n(x)=0$

أي $x=\alpha_n$ (من السؤال °1\ **b.**)

α_n هي فاصلة نقطة تقاطع (Γ) مع Δ_n .



من الشكل ، يبدو أن $\alpha_1 = 1$. نتحقق من هذا بالملاحظة أن $B_1(1;0)$ ينتمي للمستقيم Δ_1 (تعريف Δ_n) و للمنني (Γ) (لأن $\ln 1 = 0$) .

من جهة أخرى ، يظهر من الشكل أن المتتالية (α_n) متزايدة .

3° \ **a.** نعلم أن $f_n(\alpha_n) = 0$ أي $\ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0$

و منه $\ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1$

b. لدينا $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1$ و $\ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1$

منه

$$f_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1 + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1$$

$$= -\frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} = \alpha_n\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)\alpha_n$$

بما أن α_n ينتمي إلى المجال $[1;e[$ (إذن $\alpha_n > 0$) و n عدد طبيعي غير معدوم

فإن $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. مهما كان n عددا حقيقيا غير معدوما لدينا :

- $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ (تعريف α_n)
- $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ (السؤال السابق)

بالفرق : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ أي $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n)$

بما أن الدالة f_{n+1} متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

المتتالية (α_n) متزايدة تماما .

d. – المتتالية (α_n) متزايدة تماما .

– مهما كان n عددا حقيقيا غير معدوما ، فإن $\alpha_n < e$ ($\alpha_n \in [1;e[$).

منه ، المتتالية (α_n) متقاربة . (متزايدة و محدودة من الأعلى)

نسمي l نهايتها . نعلم ، من السؤال 3° **a**، أن $\ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1$.

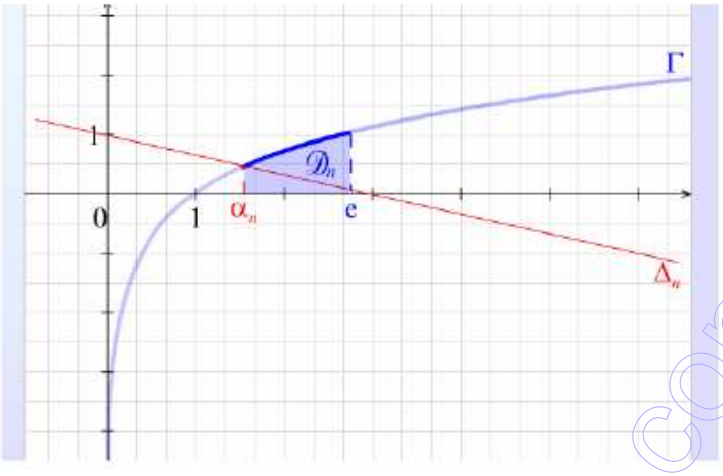
لدينا من جهة : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = l$ و منه $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln l$ (الدالة "ln" مستمرة)

من جهة أخرى ، $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha_n}{n}+1\right) = 1$ لأن $\left.\begin{array}{l} n \to +\infty \\ \alpha_n \to l \\ -\frac{\alpha_n}{n} \to 0 \end{array}\right\}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha_n}{n}+1\right)$ فإن $\ln l = 1$.

نستنتج أن $\ln l = \ln e$ أي $l = e$.

4° \ a. D_n الحيز للمستوي المحدد بـ (Γ) و المستقيمات التي معادلتها $y=0$ ، $x=\alpha_n$ و $x=e$.

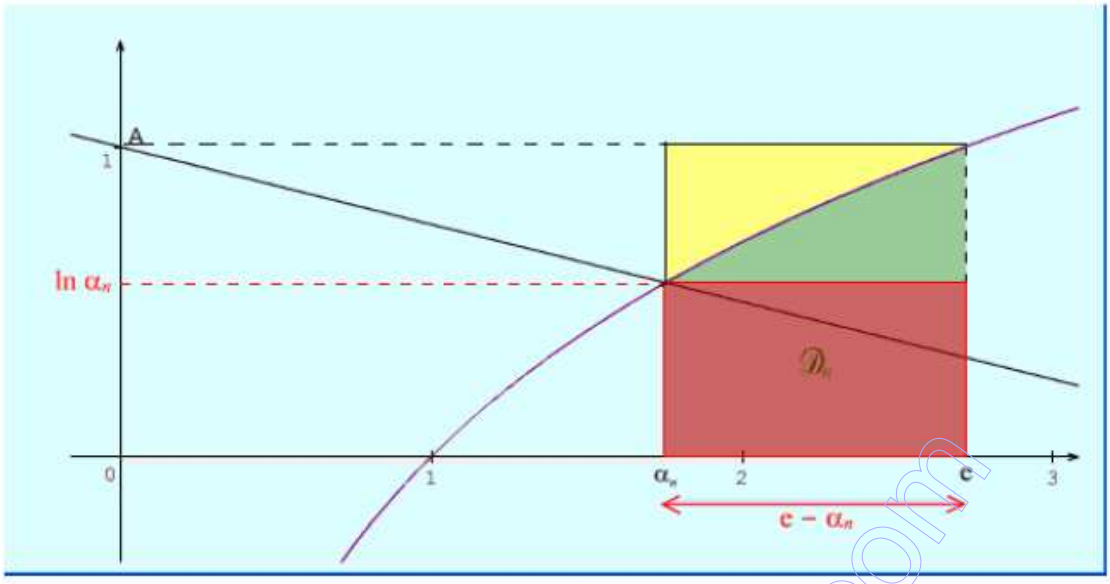


بما أن $\alpha_n > 1$ ($\alpha_n \in [1;e[$) فإن الدالة "ln" مستمرة و موجبة تماما على $[\alpha_n;e]$. منه : $D_n = \int_{\alpha_n}^{e} \ln x dx$. نستعمل التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases}$ منه $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ و $D_n = [x\ln x]_{\alpha_n}^{e} - \int_{\alpha_n}^{e} x\frac{1}{x}dx$

$$\begin{aligned} D_n &= [x\ln x]_{\alpha_n}^{e} - \int_{\alpha_n}^{e} 1\,dx \\ &= [x\ln x - x]_{\alpha_n}^{e} \\ &= (e\ln e - e) - (\alpha_n \ln\alpha_n - \alpha_n) \\ &= -\alpha_n \ln\alpha_n + \alpha_n = -\alpha_n\left(-\frac{\alpha_n}{n}+1\right)+\alpha_n \\ &= \frac{\alpha_n^{\,2}}{n} \end{aligned}$$

$D_n = \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n}$ وحدة المساحات .



مساحة D_n محصورة بين مساحتا مستطيلين :

الأول طوله $e-\alpha_n$ و عرضه $\ln\alpha_n$ إذن مساحته $(e-\alpha_n)\ln\alpha_n$

و الثاني طوله $e-\alpha_n$ و عرضه $\ln e=1$ إذن مساحته $(e-\alpha_n)$

منه $(e-\alpha_n)\ln(\alpha_n)\le\frac{\alpha_n^{\,2}}{n}\le(e-\alpha_n)$.

c. حصر العدد $n(e-\alpha_n)$:

من السؤال السابق ، $(e-\alpha_n)\ln(\alpha_n)\le\frac{\alpha_n^{\,2}}{n}$ أي $n(e-\alpha_n)\le\frac{\alpha_n^{\,2}}{\ln\alpha_n}$

(ضرب الطرفين بالعدد الموجب $\frac{n}{\ln\alpha_n}$) .

كذلك من السؤال السابق ، $\frac{\alpha_n^{\,2}}{n}\le(e-\alpha_n)$ أي $\alpha_n^{\,2}\le n(e-\alpha_n)$

(ضرب الطرفين بـــالعدد الطبيعي n) .

بالتالي ، لدينا $\alpha_n^{\,2}\le n(e-\alpha_n)\le\frac{\alpha_n^{\,2}}{\ln\alpha_n}$.

d. نحسب $\lim_{n\to+\infty} n(e-\alpha_n)$.

نعلم من السؤال 3° \ **d.** أن : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = e$ و $\lim_{n\to+\infty} \ln\alpha_n = \ln e = 1$

منه : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{\,2} = e^2$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n^{\,2}}{\ln\alpha_n} = \frac{e^2}{1} = e^2$

بما أن $\alpha_n^{\,2} \le n(e-\alpha_n) \le \frac{\alpha_n^{\,2}}{\ln\alpha_n}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} n(e-\alpha_n) = e^2$

(نظرية الحصر) .

www.youcefmaths.com